Doç. Dr. Özcan Kalenderli 24.10.2008

Sayısal Yöntemler

1. Yıliçi Sınavı Yanıtları

1) f(x) = sin x işlevinin x_0 = 0,2 radyan civarında Taylor serisi açılımını ilk dört terimi ile elde ediniz. Bu açılımdan x = 0,21 için f(0,21) değerini 10^{-2}'den küçük mutlak hata ile bulunuz.

Yanıt: Bir $f(x)$ işlevinin x_0 civarında Taylor açılımı:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\ldots$$

$f(x)$ = sin x için x_0 civarında Taylor açılımı:

$f(x) = \sin x$
$f'(x) = \cos x$
$f''(x) = -\sin x$
$f'''(x) = -\cos x$

$$f(x)=\sin x=\sin(x_0)+\cos(x_0)(x-x_0)+\frac{-\sin(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{-\cos(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\ldots$$

x_0 = 0,2 radyan için sayısal değerlerle Taylor açılımı:

$f(0,2) = \sin 0,2 = 0,198669$
$f'(0,2) = \cos 0,2 = 0,9800665$
$f''(0,2) = -\sin 0,2 = -0,198669$
$f'''(0,2) = -\cos 0,2 = -0,9800665$

$$f(x)=\sin x=\sin(0,2)+\cos(0,2)(x-0,2)+\frac{-\sin(0,2)}{2!}(x-0,2)^2+\frac{-\cos(0,2)}{3!}(x-0,2)^3+\ldots$$

$$f(x)=\sin x=0,198669+0,9800665(x-0,2)-\frac{0,198669}{2!}(x-0,2)^2-\frac{0,9800665}{3!}(x-0,2)^3+\ldots$$

Hataya uygun terim sayısını belirleme:

x_0 = 0,2 radyan ve x = 0,21 radyan için sin 0,21 hesabının mutlak hatasının $\varepsilon \le 10^{-2}$ olması isteniyor. Taylor açılımı kesme hatası

$\left|R_m\right| \le \left|\frac{(x-x_0)^m}{m!} f^{(m)}(x_0)\right| \le 10^{-2}$ olması için

m = 1 için $R_1 \le \left|\frac{(0,21-0,2)^1}{1!} f'(0,2)\right| = \left|\frac{0,01}{1}\cdot 0,9800665\right| = 0,009800665 < 10^{-2}$ olur.

Buna göre bir terim yeterlidir. Bir terimle sayısal olarak

$f(0,21) = \sin 0,21 \cong 0,198669$

bulunur. Sağlama yapılırsa

Hesap makinesi ile sin 0,21 = 0,208459
Mutlak hata = $\left|0,208459-0,198669\right| = 0,00979 < 10^{-2}$

g(x) = $\sqrt{x}$ fonksiyonundan elde edilen bir veri kümesi aşağıda verilmiştir.

x	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25
f(x)	1,000	1,025	1,049	1,072	1,095	1,118

Bu veri kümesinden yararlanarak aşağıdaki soruyu yanıtlayınız.

2) Türev hesabı için ileri, geri ve merkezi sonlu farklar çizelgelerini oluşturunuz ve her bir çizelgeden yararlanarak birinci mertebeden hatayla ikinci mertebe türev hesabına göre f''(1,1) değerini hesaplayınız.

	x	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25
	f(x)	1,000	1,025	1,049	1,072	1,095	1,118
İleri Farklar	Δf_j	0,025	0,024	0,023	0,023	0,023	
	$\Delta^2 f_j$	-0,001	-0,001	0	0		
	$\Delta^3 f_j$	0	0,001	0			
	$\Delta^4 f_j$	0,001	-0,001				
	$\Delta^5 f_j$	-0,002					
Geri Farklar	∇f_j		0,025	0,024	0,023	0,023	0,023
	$\nabla^2 f_j$			-0,001	-0,001	0	0
	$\nabla^3 f_j$				0	0,001	0
	$\nabla^4 f_j$					0,001	-0,001
	$\nabla^5 f_j$						-0,002
Merkezi Farklar	δf_j		0,0245	0,0235	0,023	0,023	
	$\delta^2 f_j$			-7,5.10^{-4}	-2,5.10^{-4}		
	$\delta^3 f_j$			-	-		

Çizelgeden f''(1,1) değerinin hesabı:

İleri farklarla:

$$f''(1,1) = \frac{\Delta^2 f(1,1)}{h^2} + R(h) = \frac{0}{0,05^2} + R(h) = 0$$

Geri farklarla:

$$f''(1,1) = \frac{\nabla^2 f(1,1)}{h^2} + R(h) = \frac{-0,001}{0,05^2} + R(h) = -0,4 + R(h)$$

Merkezi farklarla:

$$f''(1,1) = \frac{\delta^2 f(1,1)}{h^2} + R(h^2) = \frac{-7,5.10^{-4}}{0,05^2} + R(h^2) = -0,3 + R(h^2)$$

g(x) = $\sqrt{x}$ fonksiyonundan elde edilen bir veri kümesi aşağıda verilmiştir.

x	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25
f(x)	1,000	1,025	1,049	1,072	1,095	1,118

Bu veri kümesinden yararlanarak aşağıdaki soruyu yanıtlayınız.

3) $\sqrt{1{,}19}$ değerini, fonksiyonun x_0 = 1,2 civarındaki Taylor açılımından yararlanarak ve türevler için uygun sonlu fark karşılıklarını kullanarak 10^{-2}'den küçük mutlak hata ile bulunuz.

1,2 değeri veri kümesinin sonuna yakın bir değer olduğu ve daha çok veri kullanabilmek için geri farklarla türevleri kullanmak uygundur.

$f(x)$ işlevinin x_0 civarında Taylor açılımı:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \ldots$$

Hataya uygun terim sayısını belirleme:

x_0 = 1,2 ve x = 1,19 için $\sqrt{1{,}19}$ hesabının mutlak hatasının $\varepsilon \leq 10^{-2}$ olması isteniyor. Taylor açılımı kesme hatası

$$|R_m| \leq \left| \frac{(x - x_0)^m}{m!} f^{(m)}(x_0) \right| \leq 10^{-2} \text{ olması için}$$

Geri farklarla:

$$f'(1{,}2) = \frac{\nabla^2 f(1{,}2)}{h} + R(h) = \frac{0{,}023}{0{,}05} + R(h) = 0{,}46 + R(h)$$

değerini kullanarak

m = 1 için $R_1 \leq \left| \frac{(1{,}19 - 1{,}2)^1}{1!} f'(1{,}2) \right| = \left| \frac{-0{,}01}{1} \cdot 0{,}46 \right| = 0{,}0046 < 10^{-2}$ olur.

Buna göre bir terim yeterlidir. Bir terimle sayısal olarak

$$f(1{,}19) = \sqrt{1{,}19} \cong f(1{,}2) = 1{,}095$$

bulunur.

Sağlama:

Analitik olarak $\sqrt{1{,}19} = 1{,}090871211$

Mutlak hata $\varepsilon = |1{,}090871211 - 1{,}095| = 0{,}004128789 < 10^{-2}$

g(x) = $\sqrt{x}$ fonksiyonundan elde edilen bir veri kümesi aşağıda verilmiştir.

x	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25
f(x)	1,000	1,025	1,049	1,072	1,095	1,118

Bu veri kümesinden yararlanarak aşağıdaki soruyu yanıtlayınız.

4) İnterpolasyonla $\sqrt{1{,}02}$ değerini ve bu değerin gerçek g(1,02) değerine göre mutlak ve bağıl hatasını hesaplayınız.

x = 1,02 başa yakın olduğu için ileri sonlu farklarla interpolasyon uygundur.

x (yeni)	x (eski)	f(x)	Δf	Δ^2f	Δ^3f	Δ^4f	Δ^5f
0	1	1	0,025	-0,001	0	0,001	-0,002
1	1,05	1,025	0,024	-0,001	0,001	-0,001	
2	1,1	1,049	0,023	0	0		
3	1,15	1,072	0,023	0			
4	1,2	1,095	0,023				
5	1,25	1,118					

Ölçeklendirme: (h = 0,05)

x_{eski} = 1,02 değeri $x_{yeni} = \dfrac{1{,}02-1}{0{,}05} = 0{,}4$ olur.

İleri Gregory-Newton interpolasyon formülünden

$$f(x) = f(0) + \Delta f_0 \cdot x + \frac{\Delta^2 f_0}{2!}x(x-1) + \frac{\Delta^3 f_0}{3!}x(x-1)(x-2) + \frac{\Delta^4 f_0}{4!}x(x-1)(x-2)(x-3)$$
$$+\frac{\Delta^5 f_0}{5!}x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + \ldots$$

$$f(x) = 1 + 0{,}025\cdot x + \frac{0{,}001}{2!}x(x-1) + \frac{0}{3!}x(x-1)(x-2) + \frac{0{,}001}{4!}x(x-1)(x-2)(x-3)$$
$$+\frac{-0{,}002}{5!}x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

x_{yeni} = 0,4 için

$$f(x) = 1 + 0{,}01 + 0{,}00012 + 0 - 0{,}0000416 - 0{,}000059904 = 1{,}010018496$$
$$f(1{,}02)_{eski} = f(0{,}4)_{yeni} = 1{,}010018496$$

bulunur.

Sağlama:

Analitik olarak $\sqrt{1{,}02} = 1{,}009950494$

Mutlak hata $\varepsilon = |1{,}009950494 - 1{,}010018496| = 0{,}000068002$

Bağıl hata $\rho = \dfrac{1{,}009950494 - 1{,}010018496}{|1{,}009950494|} = -0{,}000067332$